Roll No. ....

DD–2759

B. A./B. Sc./B. Sc. B. Ed. (Part III) EXAMINATION, 2020

MATHEMATICS

Paper Second

(Abstract Algebra)

Time : Three Hours

Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक इकाई से कोई **दो** भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts of each Unit. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) मान लो G एक समूह है तथा g, समूह G का एक स्थिर अवयव है। तब सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $T_g : G \to G$ जो कि $T_g(x) = g\,x\,g^{-1}\ \forall x \in G$ से परिभाषित है, समूह G का एक स्वाकारिता है।

Let G be a group and $g \in G$ be a fixed element of G. Then prove that the mapping $T_g : G \to G$ defined by $T_g(x) = g\,x\,g^{-1}\ \forall x \in G$ is an automorphism.

(ब) मान लो H तथा K एक परिमित समूह G के कोई दो उपसमूह हैं तथा $o(H) > \sqrt{o(G)}$ एवं $o(K) > \sqrt{o(G)}$, तब दर्शाइये कि :

$$H \cap K \neq \{e\},$$

जहाँ e समूह G का तत्समक है।

Let H and K be two subgroups of a finite group G, such that :

$$o(H) > \sqrt{o(G)} \text{ and } o(K) > \sqrt{o(G)}$$

then show that $H \cap K \neq \{e\}$, where e is the identity element of G.

(स) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G का केन्द्र $Z(G)$, सदैव G पर एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

Prove that the centre $Z(G)$ of a group G is always a normal subgroup of G.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) सिद्ध कीजिए कि एक वलय का प्रत्येक विभाग वलय, उस वलय का समाकारी प्रतिबिम्ब होता है।

Prove that every quotient ring of a ring, is homeomorphic image of the ring.

(ब) यदि $f(x)$ तथा $g(x), R[x]$ के दो शून्येतर बहुपद हों, तो दर्शाइये कि :

(i) $\deg|f(x)+g(x)| \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$

यदि $f(x)+g(x) \neq 0$;

(ii) $\deg|f(x)+g(x)| \leq \deg f(x) + \deg g(x)$

If $f(x)$ and $g(x)$ are two non-zero polynomials of R $[x]$, then show that :

(i) $\deg|f(x)+g(x)| \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$

if $f(x)+g(x) \neq 0$;

(ii) $\deg|f(x) \,.\, g(x)| \leq \deg f(x) + \deg g(x)$

(स) शेषफल प्रमेय "यदि बहुपद $f(x)$ को $(x-a)$ से भाग दिया जाये, तो शेषफल $f(a)$ होता है।" सिद्ध कीजिए।

The remainder theorem "If the polynomial is divided by $(x-a)$, then the remainder is $f(a)$." Prove this theorem.

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) दर्शाइये कि सदिश (2, 1, 4), (1, –1, 2) और (3, 1, –2), R^3 के लिए एक आधार निर्मित करते हैं।

Show that the vectors (2, 1, 4), (1, –1, 2) and (3, 1, –2) make the basis of R^3.

(ब) सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि के किन्हीं **दो** उपसमष्टियों का सर्वनिष्ठ भी एक उपसमष्टि होता है।

Show that the intersection of two vector subspaces of a given vector space is also a vector subspace.

(स) सिद्ध कीजिए कि $R[x]$, R पर x में सभी बहुपदों के सदिश समष्टि में बहुपदों :

$$p(x) = 1 + x + 2x^2$$

$$q(x) = 2 - x + x^2$$

$$r(x) = -4 + 5x + x^2$$

का निकाय रैखिकतः परतन्त्र बहुपद है।

Prove that the polynomials :

$$p(x) = 1 + x + 2x^2$$

$$q(x) = 2 - x + x^2$$

$$r(x) = -4 + 5x + x^2$$

defined on R [x], where R is the vector space of all polynomials of x, are linearly dependent polynomials.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) दिखाइये कि प्रतिचित्रण :

$$T : V_3(R) \to V_2(R)$$

जो कि $T(a, b, c) = (c, a + b)$ से परिभाषित है, एक रैखिक प्रतिचित्रण है।

Show that the mapping :

$$T : V_3(R) \to V_2(R)$$

defined by $T(a, b, c) = (c, a + b)$ is a linear transformation.

(ब) इनमें से कौन-सा प्रतिचित्रण; जो कि R^2 के सदिशों $\alpha = (x_1, x_2)$, $\beta = (y_1, y_2)$ के लिए परिभाषित है, द्वि-एकघाती समघात है ? द्वि-एकघाती के लिए दोनों की जाँच कीजिए :

(i) $f(\alpha, \beta) = x_1 y_2 - x_2 y_1$

(ii) $g(\alpha, \beta) = (x_1 - y_2)^2 + x_2 y_2$

Which of the following mappings; defined on R^2 for vector $\alpha = (x_1, x_2)$, $\beta = (y_1, y_2)$ is bilinear form ? Test both for bilinearity :

(i) $f(\alpha, \beta) = x_1 y_2 - x_2 y_1$

(ii) $g(\alpha, \beta) = (x_1 - y_2)^2 + x_2 y_2$

(स) निम्नलिखित सममित आव्यूह के संगत द्विघाती समघात को लिखिए :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Write the following symmetric matrix :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

into corresponding quadratic form.

इकाई—5

(UNIT—5)

5\. (अ) यदि α और β एक आन्तर-गुणन समष्टि $V(F)$ के दो सदिश हैं, तो सिद्ध कीजिए कि :

(i) $4\langle \alpha, \beta \rangle = \|\alpha + \beta\|^2 - \|\alpha - \beta\|^2 + i\|\alpha + i\beta\|^2 - i\|\alpha - i\beta\|^2$

(ii) $\|\alpha + \beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$

If α and β are vectors of an inner-product space V (F), then prove that :

(i) $4\langle \alpha, \beta \rangle = \|\alpha + \beta\|^2 - \|\alpha - \beta\|^2 + i\|\alpha + i\beta\|^2 - i\|\alpha - i\beta\|^2$

(ii) $\|\alpha + \beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$

(ब) ग्राम-श्मिट लांबिकीकरण प्रक्रम का उपयोग करते हुए दिए गए आधार $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, से एक प्रसामान्य लांबिक आधार प्राप्त कीजिए, जहाँ $\beta_1 = (1, 0, 1)$, $\beta_2 = (1, 2, -2)$, $\beta_3 = (2, -1, 1)$ ।

Using Gram-Schmidt orthogonalization process, find the orthonormal basis for the given base : B = $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, where $\beta_1 = (1, 0, 1)$, $\beta_2 = (1, 2, -2)$ and $\beta_3 = (2, -1, 1)$.

(स) सदिशों

$$\alpha = (a_1, a_2),\ \beta = (b_1, b_2) \in V_2(R)$$

के लिए दिखाइये कि $V_2(R)$ आन्तर-गुणन समष्टि होगा, जबकि आन्तर-गुणन की परिभाषा निम्न प्रकार है :

$$\langle \alpha, \beta \rangle = 3a_1 b_1 + 2a_2 b_2 .$$

For the vectors :

$$\alpha = (a_1, a_2),\ \beta = (b_1, b_2) \in V_2(R)$$

show that V_2 (R) is an inner-product space defined by the inner-product :

$$\langle \alpha, \beta \rangle = 3a_1 b_1 + 2a_2 b_2 .$$